NODVS — L'aperiòdic virtual de la Secció Clínica de Barcelona
Dipòsit legal B-24256-2010. ISSN 2013-8539

NODVS LXIII
Abril de 2022

Acerca del teorema de Gödel

Referencia presentada en la sesión del 15 de enero de 2022 del Seminario del Campo Freudiano de Barcelona, ??impartida por Carmen Cuñat.

Daniel Casellas

Resum

Lacan se apoya en las demostraciones que Kurt Gödel realizó en sus teoremas de incompletitud e inconsistencia, para señalar la necesidad lógica de la función de la castración. En este trabajo tratamos de dar cuenta, con un breve recorrido por la historia de las matemáticas, de aquello que llevó a Gödel a escribir el trabajo que en 1931 tiró por los suelos los intentos de David Hilbert de demostrar la consistencia absoluta de las matemáticas.

Paraules clau

Gödel, inconsistencia, incompletitud, imposible lógico, necesidad lógica

En 1931 Kurt Gödel publicó su texto *Sobre las proposiciones formalmente indecibles de los Principia mathematica y sistemas afines*. A partir de la aritmetización, es decir, de la codificación en números de los axiomas de la obra magna de Russell y Whitehead, fue capaz de demostrar en él lo que vino a llamarse el teorema de la incompletitud y el de la inconsistencia. Gracias a esa aritmetización, pudo prescindir de los valores verdadero y falso por no tener que referirse más que a la posibilidad de derivar o no una proposición de sus propios axiomas.

En aras de la comprensión diremos que un sistema es *completo* si todas las proposiciones verdaderas que pueden expresarse en él son formalmente deducibles de los axiomas, es decir, si no hay una proposición verdadera que no pueda ser derivada de ellos. Un sistema es *consistente* si del conjunto de sus axiomas no puede derivarse una proposición y su contraria, es decir, si no puede derivarse una proposición falsa, o lo que es lo mismo, una contradicción.

Lo que demostró Gödel es que, si un sistema es consistente, es incompleto. Lo hizo construyendo en términos aritméticos una proposición que dice de sí misma que no es demostrable; esta proposición, a la que llamaremos G, dice: *Esta proposición no es demostrable.* G, por lo tanto, será demostrable solamente si lo contrario de G, *Esta proposición es demostrable*, también lo es. Si ambas son formalmente demostrables, constituirían una contradicción y el sistema se demostraría inconsistente. Si el cálculo es consistente, ni G ni su contrario serán formalmente derivables de sus axiomas, por lo que G será indecidible y, por lo tanto, la aritmética incompleta.

La aritmética, por lo tanto, es consistente siempre y cuando exista por lo menos una fórmula que no sea demostrable. A partir de esta misma construcción, Gödel demostrará el teorema de inconsistencia que afirma que, si la aritmética es consistente, su consistencia no puede ser probada por ningún razonamiento matemático susceptible de ser representado dentro de su propio formalismo, es decir, que introduce dentro de todo discurso axiomatizable lo que Lacan llamará un “hiato irreductible”[1]. No obstante, el teorema de Gödel no excluye la posibilidad de que la aritmética pueda ser consistente, sino de que lo haga desde sus mismos postulados, por lo que para hacerlo, debería recurrir a otro discurso[2].

El trabajo de Gödel no era sino una respuesta a la tarea que David Hilbert emprendió en 1900 para establecer la certidumbre de los métodos matemáticos a partir de una demostración absoluta de su consistencia. Pero ¿a que venía esta preocupación por la consistencia y completitud de las matemáticas? ¿Era esta una cuestión que había preocupado a la matemática desde siempre?

La respuesta es negativa. Durante dos mil años, la consistencia de la geometría euclidiana y su aritmética era dada por supuesta como correlativa al orden escrito en la naturaleza, o como diría Galileo, al plan matemático de Dios.

Esta concepción perdió su validez a partir del trabajo de Gauss, Bolyai, Lobachevsky y Riemann, que demostraron que podían construirse nuevos sistemas de geometría utilizando cierto número de axiomas distintos de los adoptados por Euclides e incompatibles con ellos. Si, por ejemplo, el primer axioma de Euclides afirma que entre dos puntos solo puede trazarse una línea recta, estos autores demostraron que pueden trazarse infinitas rectas si el espacio planteado no es plano sino una esfera[3].

Estas nuevas geometrías demostraron que la geometría euclidiana no era necesariamente la geometría del mundo físico, y abrieron la posibilidad de que ésta produjera contradicciones que anteriormente parecían inconcebibles. La creencia de que los axiomas de la geometría y los de cualquier disciplina pueden ser establecidos como tales por su propia autoevidencia, caía por su propio peso. Por si fuera poco, la aritmética clásica tuvo que aceptar que sus fundamentos fueran cuestionados por las contradicciones lógicas que la teoría de conjuntos y los números transfinitos de Georg Cantor revelaron en su seno.

Estos descubrimientos hicieron que se revisaran los fundamentos sobre los que las matemáticas se habían asentado, demostrándose imprecisos e inconsistentes. La antigua concepción de la matemática como ciencia del espacio y la cantidad, se revelaba equívoca y engañosa. La creciente abstracción de las matemáticas planteaba un problema que no estaba presente cuando éstas versaban sobre una especie concreta y conocida de objetos, por lo que se emprendió la tarea de demostrar que las conclusiones que se obtenían con ella eran realmente consecuencias lógicas necesarias de las hipótesis iniciales.

Se daba el caso, por ejemplo, de que alguna de las geometrías no euclidianas, pese a no ser verdaderas respecto al espacio ordinario, no eran contradictorias. ¿Cómo podía probarse su consistencia? Para ello se tradujeron las expresiones de un sistema en el de otro que se consideraba consistente, y de ese modo se pudo demostrar la consistencia de las geometrías no euclidianas sobre el modelo de los postulados de Euclides. Pero ¿sobre qué modelo se demostraba la geometría euclidiana? Sobre el modelo del espacio ordinario. Ello era insostenible lógicamente, pues es imposible probar que hechos aún no observables pudieran llegar a contradecir los postulados establecidos. Este método suponía una prueba de consistencia relativa, es decir, que desplazaba el problema de la consistencia de un sistema al de otro más asentado. Quedaba por demostrar si son consistentes por sí mismos los postulados euclidianos y de las matemáticas en general.

Varios matemáticos trataron de resolver el problema de la consistencia desde distintos paradigmas, entre ellos Frege, Russell y Whitehead, que intentaron probar sin éxito que todas las matemáticas eran derivables de la lógica y, por lo tanto, consistentes.

Por su lado, David Hilbert fue capaz de demostrar la consistencia de los axiomas euclidianos formalizándolos como verdades algebraicas, por lo que, para conseguir la prueba de consistencia absoluta que anhelaba, debía probar que la aritmética era consistente por sí misma, es decir que, a partir de sus postulados, nunca sería posible llegar a afirmar una proposición falsa. El problema es que los axiomas son interpretados por modelos compuestos de un número infinito de elementos y esto hace imposible encerrar los modelos en un número finito de observaciones sobre las que se pueda aseverar que nunca se producirá uno contradictorio. Para resolverlo, Hilbert planteó un método de demostración que se basaba en lo que llamó *metamatemática*, es decir, un metalenguaje algebraico que pretendía ser un modelo con un número limitado, simple y obvio de elementos lógicos que permitiera una inspección directa y exhaustiva de todos los postulados de un sistema, volviéndolos para ello finitos. Pretendía demostrar con él que se podían probar o refutar todos los enunciados significativos derivados de los axiomas de un sistema, a la vez que no dejar lugar para proposiciones indemostrables, es decir, demostrar la consistencia y la completitud de cualquier sistema formal.

Los resultados provistos por Gödel destruyeron la pretensión de Hilbert, así como el proyecto de una axiomatización completa de cualquier disciplina científica. La incompletitud y la inconsistencia dejaron de constituir un signo de la impotencia de quienes trataban de erradicarlas, para convertirse en un imposible lógico. Pasaban de ser un accidente, a constituir una necesidad lógica.

Notes

1. Lacan, Jacques. *El seminario, libro 19, ...o peor*. Paidós, Buenos Aires, 2016, p. 39.

2. Ibíd., "Todo discurso toma su sentido a partir de otro discurso".

3. Para poner un ejemplo práctico, podríamos decir que esta geometría se utiliza actualmente para los sistemas GPS debido a las condiciones espaciales del globo terrestre.

Bibliografia

Kline, M. *Las matemáticas. La pérdida de la certidumbre*. Siglo XXI editores, Méjico, 1994.

Lacan, Jacques. *El seminario, libro 19, ...o peor*. Paidós, Buenos Aires, 2016.

Nagal, E., Newman, J. R. *El teorema de Gödel*. Editorial Tecnos, Madrid, 2007.